
Descripción matemática de las ondas de tubo en pozos

Edgar Ángeles Cordero¹

Resumen

En el presente documento se ofrece una breve descripción matemática de las ondas de tubo tipo Stoneley, donde a partir de la resolución de la ecuación de onda en coordenadas cilíndricas se encuentra la solución potencial escalar conservativa y la solución potencial vectorial solenoidal de la función de desplazamientos para una simetría cilíndrica, con esto se genera un modelado de propagación mediante la simulación de registro de perfil sísmico vertical para analizar el comportamiento de estas ondas y cómo es que después de generar múltiples en la parte superior del pozo se propagan a profundidad con mucho mayor frecuencia y baja amplitud.

Antecedentes

El uso de la tecnología sísmica para el estudio de las condiciones de los pozos petroleros ha sido enfocada al uso de la tecnología del perfil sísmico vertical en sus diferentes variantes, así como el uso del registro sísmico mientras se perfora, tecnología Logging While Drilling, LWD por sus siglas en inglés, (Coates, 2006) y en años recientes se ha empezado usar las ondas se-

cundarias que acompañan a los registros convencionales para inferir geometría, profundidades y características de las formaciones geológicas (Martínez, 2011).

El modelado de ondas sísmicas está ampliamente discutido en el texto de Aki (2002), por lo cual en este trabajo solo presentaremos la ecuación que rige la propagación de ondas S en las tuberías de revestimiento de los pozos, bajo la suposición de estratos planos horizontales y homogéneos, una tubería de densidad uniforme.

Se presenta un modelado de respuesta sísmica de un pozo que está siendo sometido a vibraciones mecánicas que se generan en la mesa rotaria, mostrando la transmisión de la energía sobre las paredes del pozo simulando ondas Stoneley (Aki, 2002) que se propagan a las formaciones rocosas circundantes.

Hipótesis

Para el modelado de ondas sísmicas en pozos con agujero entubado se suele usar la geometría de un cilindro hueco vertical recto de densidad uniforme, con espesor no comparable con la longitud del cilindro. Se elige un sistema de referencia en coordenadas cilín-

¹ Director de Ciencias de la Tierra de la Universidad Olmeca. Correo electrónico: ance25@yahoo.com

dricas como lo exige la simetría del problema, y se considera que el cilindro es uniforme isótropo en cuanto a sus velocidades de propagación de ondas P y ondas S. La geometría que describe el problema general se muestra en la siguiente figura.

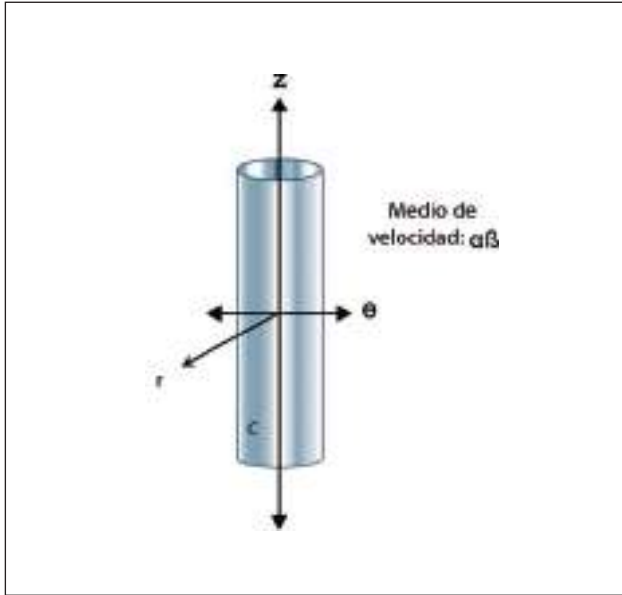


Figura 1. Para encontrar una función de desplazamientos acorde a la simetría del problema, se supone un sistema de referencia cilíndrico (r,theta,z), el cual está inmerso en un medio de velocidad α de ondas compresionales y β de ondas de corte. Y sea c la velocidad de ondas compresionales del fluido dentro del cilindro.

Potencial de desplazamientos para las ondas en el tubo (Stoneley)

Diversos autores ya han fundamentado la función de desplazamientos que simula el proceso de propagación de ondas mecánicas en geometrías cilíndricas (Biot 1952, Cheng, Toksoz 1981, Peterson 1974, Roever *et al.* 1974, Tongtaow 1980, Tsang, Rader 1979, Blanco, Zechman 1968 y Wyatt 1979). Estas soluciones muestran que las funciones potenciales para describir el movimiento en el interior y exterior del cilindro satisfacen la ecuación de onda en coordenadas cilíndricas.

Partamos de la ecuación de ondas en coordenadas cilíndricas, donde para las ondas compresionales queda de la siguiente manera:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

Para las ondas de cizalla.

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

El método más usado para resolver esta ecuación diferencial parcial no homogénea es el método de separación de variables, que consiste en suponer que la función potencial es producto de tres funciones elementales que dependen de una sola variable, al multiplicarlas se construye la solución; esto supone que la función potencial que depende de cuatro variables se puede expresar como la multiplicación de cuatro funciones:

$$\phi(r, \theta, z, t) = R(r) \cdot Q(\theta) \cdot Z(z) \cdot T(t)$$

Se aplica el mismo procedimiento para las ondas de cizalla, estos es:

$$\Psi(r, \theta, z, t) = R(r) \cdot Q(\theta) \cdot Z(z) \cdot T(t)$$

Si el cilindro contiene un fluido que solo se puede desplazar en la dirección del estado de esfuerzos es cilíndrico, esto quiere decir que las componentes en dirección radial y angular son diferentes a la componente vertical, al considerarse un fluido homogéneo se considera que el potencial es independiente de la componente angular y con esto su primera y su segunda son nulas. De tal forma que se omite la componente angular en la sustitución:

$$\phi = R(r) \cdot Z(z) \cdot T(t)$$

$$\nabla^2 RQZT = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial RQZT}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 RQZT}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 RQZT}{\partial t^2}$$

Dividiendo todo por :

$$\nabla^2 RQZT = \frac{1}{rR} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$$

Reordenando para obtener ecuaciones diferenciales de una sola variable. El lado izquierdo de la ecuación diferencial solo contiene términos de r y el lado derecho contiene términos de Z y T , la única forma en que la suma de dos ecuaciones diferenciales dé otra con variable distinta es por lo que el resultado de las operaciones indicadas genere una constante negativa, entonces para asegurar el control de este número designamos a n como el número que iguala ambas ecuaciones, lo elevamos al cuadrado y lo multiplicamos por menos uno para asegurar la igualdad.

$$\frac{1}{rR} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + = -\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \frac{1}{c^2} \frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -n^2$$

La suma de dos ecuaciones diferenciales en términos de Z y de T deben dar otro número al cual llamaremos a y por tanto la ecuación queda como:

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \left(\frac{dR}{dr} \right) + r^2 n^2 = -a^2$$

Reordenando la ecuación diferencial resultante se observa que tiene la forma de una ecuación diferencial tipo Bessel (Arfken, 2011).

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(n^2 - \frac{a^2}{r^2} \right) R = 0$$

Entonces la componente radial tendrá la siguiente solución:

$$R(r) = A_0 J_a(nr) + B_0 Y_a(nr)$$

Donde J_a e Y_a son las funciones de Bessel de primera y segunda especie. Las constantes A_0 y B_0 son constantes de condiciones particulares del problema o condiciones iniciales.

Las funciones de Bessel son una aproximación que tiene la forma, tomado de Arfken (2011), esto es:

$$J_a(br) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{nr}{2} \right)^{a+2m}}{m! \Gamma(a+m+1)}$$

$$Y_a(br) = \frac{\cos(a\pi) J_a(nr) - J_{-a}(nr)}{\text{sen}(a\pi)}$$

Estas ecuaciones de solución tienen un comportamiento armónico, por lo que en la literatura geocientífica se les suele denominar como armónicos cilíndricos (Roy, 2007).

Haciendo la sustitución al plano de las constantes de la ecuación, esto es, $a=n$ y considerando que el producto nr tiende a ser muy grande, entonces la función Bessel de primera y segunda especie la podemos aproximar con la forma de Roy (2007):

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2} \right)$$

$$Y_n(nr) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \text{sen} \left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2} \right)$$

Solo restaría solucionar las ecuaciones diferenciales para la componente vertical y temporal, que son dos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden pero lineales, cuyo método de solución se puede obtener por medio del operador anulador:

$$\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -k^2$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\omega^2$$

De tal forma que:

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = -n^2$$

Por el método de la ecuación característica la solución será:

$$Z(z) = A_1 e^{-ikz} + B_1 e^{-ikz}$$

Para el tiempo será:

$$T(t) = C_0 e^{-i\omega t} + C_0 e^{+i\omega t}$$

Tomando únicamente la solución para una señal causal en el tiempo, es decir $-i\omega t$, la solución será:

$$\phi = R(r) \cdot Z(z) \cdot T(t)$$

$$\phi = (A_0 J_a(nr) + B_0 Y_a(nr)) \cdot (A_1 e^{iz} + B_1 e^{-ikz}) \cdot (C_0 e^{-i\omega t})$$

Y sustituyendo en términos de la velocidad, es decir usando v , que es la velocidad de fase de la onda de propagación, k es el número de onda en la dirección z .

$$v = \frac{\omega}{k}$$

Tenemos:

$$\phi = (A_0 J_a(nr) + B_0 Y_a(nr)) \cdot ((A_1 + C_0) e^{ik(z-vt)} + (B_1 + C_0) e^{-ik(z+vt)})$$

Si consideramos únicamente el campo de ondas que avanza, y haciendo $A_1 + C_0 = A_2$:

$$\phi = (A_0 J_a(nr) + B_0 Y_a(nr)) \cdot ((A_1 + C_0) e^{ik(z-vt)} + (B_1 + C_0) e^{-ik(z+vt)})$$

$$\phi = (A_0 + A_2) J_a(nr) + (B_0 + A_2) Y_a(nr) \cdot (e^{ik(z-vt)})$$

Haciendo $A_0 + A_2 = A$ y $B_0 + A_2 = B$

$$\phi = (A J_a(nr) + B Y_a(nr)) e^{ik(z-vt)}$$

Para el campo de desplazamientos no conservativo Ψ , la solución es muy semejante, por lo que podemos escribir:

$$\phi = (A J_a(nr) + B Y_a(nr)) e^{ik(z-vt)}$$

$$\Psi = (C J_a(mr) + D Y_a(mr)) e^{ik(z-vt)}$$

Estas ecuaciones describen matemáticamente a un conjunto de ondas tipo Stoneley que se denominaran *ondas tubulares*. Para describir ondas que se propagan a lo largo de interface sólido-fluido, tal como sucede a lo largo de las paredes de un pozo lleno de fluido, suelen usarse estas expresiones.

Para diferenciar el potencial conservativo del potencial solenoidal, se hace la sustitución de n por m en la parte solenoidal, n y m representan los números de onda. Tenemos:

$$\phi = (AJ_a(bn) + BY_a(bn))e^{ik(z-vt)}$$

$$\Psi = (CJ_a(bm) + DY_a(bm))e^{ik(z-vt)}$$

Estos números de onda n y m están relacionados como:

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = -n^2$$

$$v = \frac{\omega}{k} \text{ entonces } v \cdot k = \omega$$

$$-k^2 + \frac{(v \cdot k)^2}{c^2} = -n^2$$

Para las ondas P, $c = \alpha$:

$$-k^2 + \frac{(v \cdot k)^2}{\alpha^2} = -n^2$$

Para las ondas S, $c = \beta$:

$$-k^2 + \frac{(v \cdot k)^2}{\beta^2} = -m^2$$

Despejando los números de onda radiales n y m :

$$\left(1 - \frac{v^2}{\alpha^2}\right)k^2 = n^2$$

$$\left(1 - \frac{v^2}{\beta^2}\right)k^2 = m^2$$

Los parámetros α y β designan las velocidades de las ondas compresionales y de corte en el medio elástico alrededor del cilindro. Debido al comportamiento matemático de las funciones de Bessel modificadas J_a y Y_a las amplitudes de los desplazamientos de partículas calculadas a partir de estas funciones potenciales disminuyen exponencialmente con la distancia radial r .

Un ejemplo de esta forma de onda típica que puede ser generada y registrada por una herramienta de detección de vibraciones sísmicas colocada en el interior de un pozo se muestra en la siguiente figura.

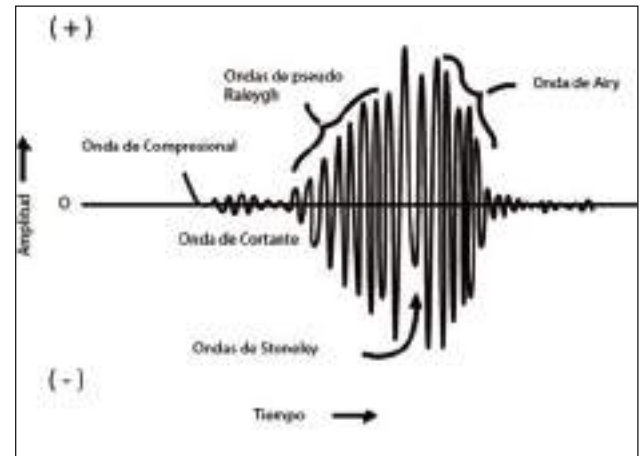


Figura 2. Las ondas de cuerpo compresionales y ondas de corte transversales son las que más se distinguen en un registro sísmico. Las ondas Stoneley tienen frecuentemente la característica de que dentro del tren de ondas de baja frecuencia y alta amplitud se presenta una variación en amplitud y frecuencia que las distingue de las formas de ondas que la rodean. Tomado de Chuen (1981).

Con ayuda de un simulador de registros sísmicos se hizo un modelado de registro de perfil sísmico lateral (Vertical Seismic Profile, VSP, por sus siglas en inglés) considerando la geometría de la figura 1 y considerando un medio estratificado; además se consideró el efecto del espesor de la tubería de revestimiento. No se consideró las heterogeneidades de las zonas de invasión en la formación alrededor del pozo.

Modelado de una sección tipo VSP

Una vez comprendida la teoría de propagación de vibraciones mecánicas en pozos, se propone la situación de formulación del problema al hacer uso de un *software* de modelado sísmico, Tesseral 2D, para modelar por ecuación de onda, un estado mecánico habitual de un pozo de 30 pulgadas en la parte más somera y terminando con 9 y 5/8 en la parte más angosta que se eli-

gió con el límite de visibilidad de método de simulación numérica.

En las figuras 3, 4, 5 y 6 se muestran los resultados de la simulación numérica de un pozo vertical dentro de una formación con tres cambios litológicos de estratificación paralela.

La primera capa estaría conformada por arenas con arcillas, la segunda capa de arenas sin arcillas y la tercera capa por arenas con arcillas y limos y alta compactación, con velocidades de propagación sísmica de 1 200, 1 500 y 1 800 m/s respectivamente.

Se bosquejó una mecánica de pozo simple y un lodo base agua, la velocidad de la tubería de revestimiento se tomó de 7 000 m/s. En la figuras se muestra a la izquierda una vista en sección transversal de la si-

tuación del pozo y la disposición de las formaciones geológicas en estratificación paralela: el triángulo rojo invertido denota la posición de una fuente de ondas mecánicas como puede ser la operación habitual de la mesa rotaria; con puntos negros se señalan los sensores sísmicos que captarían las vibraciones mecánicas producidas por una fuente de ruido con una frecuencia promedio de 70 Hz y para la ondícula de vibración de la fuente se usó un modelo de Puzirov (Postma, 1955).

En la figura 3 se muestra el inicio de propagación de la energía sísmica en la parte superior del pozo, las líneas en colores azul y rojo denotan el campo de ondas descendente donde al inicio del movimiento se observa que la energía sísmica se entrapa en la tubería de mayor diámetro.

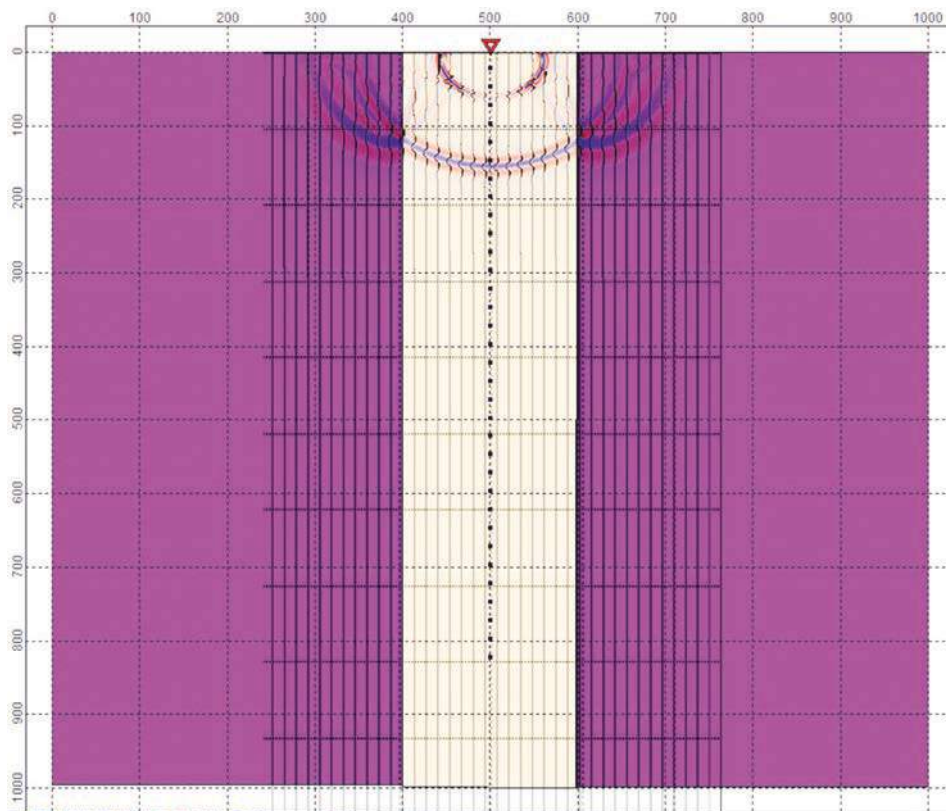


Figura 3. Esta figura describe una formación (En color morado) que presenta un pozo vertical (color amarillo) en la cual se modelo un perfil sísmico vertical, los sismo detectores son representados con puntos negros. En la parte central se representa la propagación de energía sísmica en colores rojo y azul, el origen de esta energía mecánica está situada con un triángulo rojo.

En la figura 4 se observa cómo el cambio de diámetro de la tubería constituye el generador del campo de ondas ascendente. En los primeros 100 ms de tiempo

de viaje las ondas son de baja frecuencia y alta amplitud; por la magnitud de la representación de las ondículas las ondas P son casi imperceptibles.

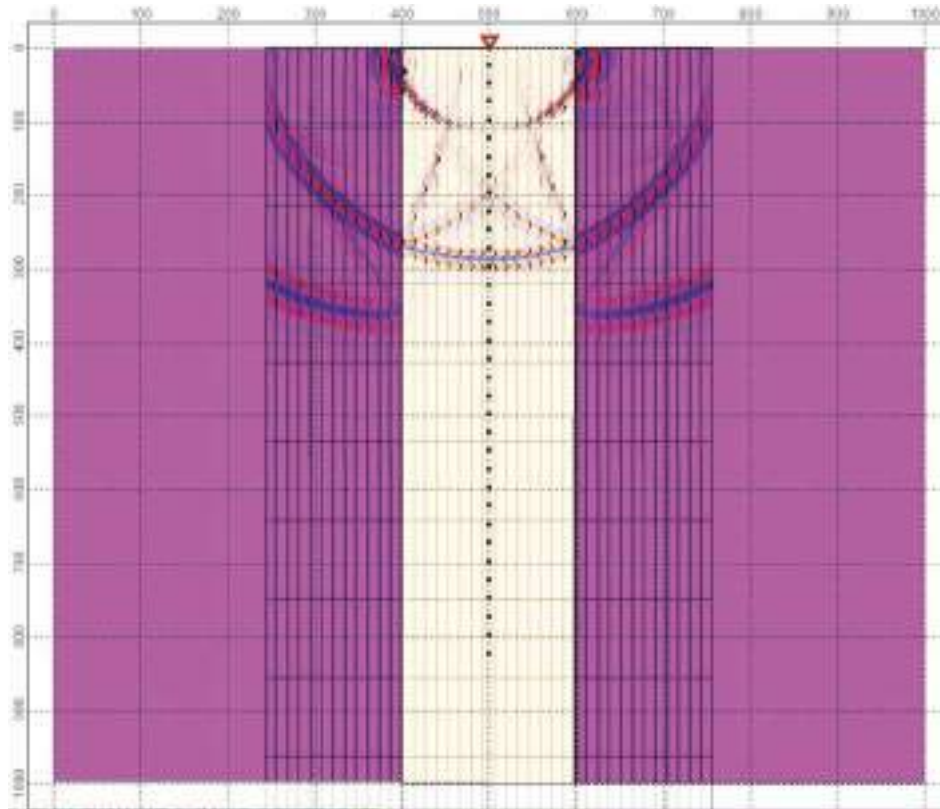


Figura 4. En esta figura se muestra cómo la energía sísmica en el interior del pozo y va generando ondas ascendentes.

Conforme el campo de ondas ascendente viaja y retorna dentro del primer diámetro de tubería las ondas van ganando frecuencia y perdiendo amplitud tal como se ve en la figura 5, es cuando las ondas tubulares o de Stoneley se van generando.

Las ondas Stoneley con altas frecuencias arriba de los 400 Hz se propagan a lo largo del eje axial del tubo del pozo (figura 6). Esta energía mecánica de altísima frecuencia se propaga según las ecuaciones para el potencial de desplazamientos conservativo y selenoidal de las ondas Stoneley. Conforme se van propagando se van separando en grupos de ondas como se observa a los 450 ms del registro, esta separación indica que hay cambios en el eje del pozo. Si el pozo contiene

un fluido este se verá afectado de igual forma, es decir será sujeto a esfuerzos distensivos.

Conclusiones

- Las ondas de tubo se hacen más notorias conforme la energía mecánica viaja hacia el fondo del pozo.
- El entendimiento de este tipo de ondas nos permite comprender los estados de esfuerzo que se generan hacia el interior de una tubería de revestimiento.
- El modelado de estas ondas muestra que la amplitud depende en gran medida de la distancia radial a la fuente.
- El incremento de los esfuerzos observados dentro de la tubería son de carácter lineal por lo que el

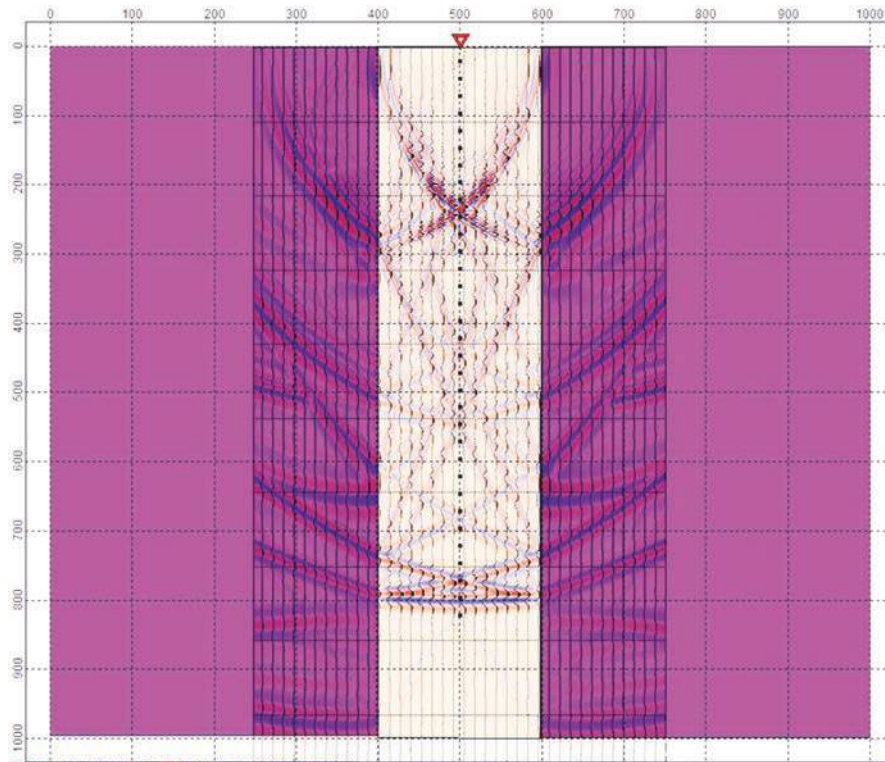


Figura 5. En la parte central se observa que una vez creado el primer múltiple dentro de la zona de diámetro mayor en el interior del pozo, la amplitud aumenta y la frecuencia aumenta también, es aquí donde estamos a inicios de la presencia de las ondas superficiales generadas por las discontinuidades verticales.

fluido contenido en la tubería experimentará esfuerzos axiales distensivos.

- Las ondas de tubo explican la importancia del desplazamiento radial de las partículas que da origen a las interfaces fluido-formación conocidas como zonas de invasión.
- La componente axial de propagación disminuye en amplitud cuando la frecuencia de las ondas tubo alcanza de los 400 a los 425 Hz.
- A altas frecuencias de vibración mecánica el movimiento de las partículas hacia el interior de la tubería tiende a tener mayor circulación, este fenómeno puede ser aprovechado en futuros diseños.

Referencias

- Aki, K., & Richards, P. G. (2002). *Quantitative seismology*, Volumen 1., 2da, Ed, Published by University Science Books. U.S.A.
- Arfken, G. B. & Weber, H. J., (2011), *Mathematical methods for physicists: a comprehensive guide*. Academic press. New York
- Cheng Ch. H., Toksöz M. N. & Willis M. E., (1982). «Determination Of In Situ Attenuation From Full Waveform Acoustic Logs», *Journal of geophysical research: solid earth*, volumen 87, pp. 5477–5484.
- Coates, R., Haldorsen, J. B., Miller, D., Malin P. et al. «Tecnologías de campos petroleros para la ciencia sísmica». *Oilfield Review*, volumen 18, pp. 26-37.
- Ingram, J. D., Morris, C. F., Macknight, E. E., & Parks, T. W. (1985). «Direct phase determination of S-wave velocities from acoustic waveform logs». *Geophysics*, volumen 50, (11), pp. 1746-1755.
- Kurkjian, A. L. (1985). «Numerical computation of individual far field arrivals excited by an acoustic

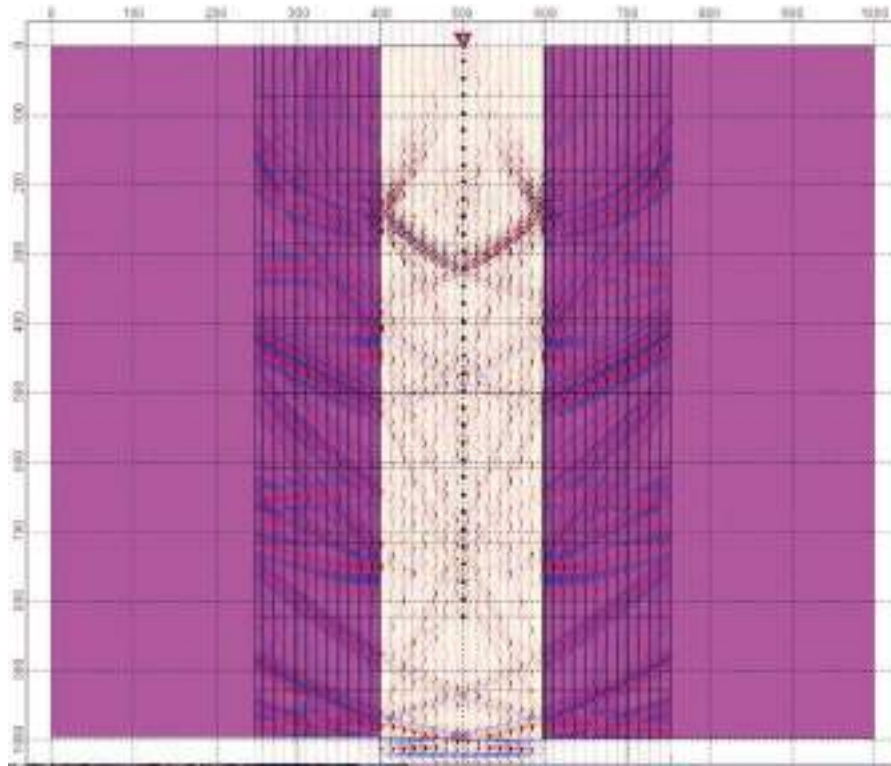


Figura 6. Casi 450 milisegundos después de generada la vibración mecánica observamos formas de onda de alta frecuencia que se propagan sobre la pared y hacia el interior del pozo, además de que aumenta su amplitud.

- source in a borehole», *Geophysics*, volumen 50, (5), pp. 1942-2156.
- Martínez, J., Almanza, O. & Montes, L. (2011). «Perfil sísmico vertical en un pozo desviado para iluminar un reservorio con estructuras de bajo buzamiento usando ondas convertidas». *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, volumen 35, (134), pp. 71-77.
- Norris, A. (1987) «The tube wave as a biot slow wave short note», *Geophysics*, volumen 52, pp. 694-696.
- Peterson, E. W. (1974), «Acoustic wave propagation along a fluid-filled cylinder» *Journal of applied physics*, volume 45, (8), pp 3340-3350.
- Postma, G. W., (1955). «Wave propagation in a stratified medium». *Geophysics*, volumen 20, (4), pp. 780-806.
- Roy, K. K., (2007). «Potential theory in applied geophysics». *Springer Science & Business Media*. New York, U.S.A.
- Tsang, L. & Rader, D., (1979). «Numerical evaluation of the transient acoustic waveform due to a point source in a fluid-filled borehole», *Geophysics*, Volumen 44, (10), pp 1706-1720.
- White, J. E. & Tongtaow, Ch., (1981). «Cylindrical Waves In Transversely Isotropic Media», *The Journal of the Acoustical Society of America*, volume 70, (4), pp. 1147-1155.
- Zill, D. G. (1997). *Ecuaciones diferenciales*. International Thomson Editores. Sexta edición. México.